CONSERVATOIRE NATIONAL SUPÉRIEUR DE MUSIQUE ET DE DANSE DE PARIS
Formation Supérieure aux Métiers du Son

Concours d'Entrée 2007 : Épreuve de Mathématiques
Durée : 3 heures

Dans toute l'épreuve, $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$ et $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$ désigne le repère orthonormé de centre $O(0,0)$.

Exercice 1

Soient les fractions rationnelles $H_1(s) = \dfrac{10+s}{s^2+2s-8}$ et $H_2(s) = \dfrac{2+3s+s^2}{s^2+2s-8}$, où $s \in \mathbb{R}$.

1.1 Quel est l'ensemble de définition de $H_1(s)$?

1.2 Quels sont les pôles et les zéros de $H_1(s)$?

1.3 Calculez le développement en éléments simples de $H_1(s)$.

1.4 Calculez le développement en éléments simples de $H_2(s)$.

1.5 Comment s'exprime $H_2(s)$ en fonction de $H_1(s)$?

Exercice 2

Soit la matrice $[A] = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. On rappelle que les valeurs propres λ_n de la matrice $[A]$ et les vecteurs propres $\vec{u}_n$ associés vérifient la condition $[A].\vec{u}_n = \lambda_n \vec{u}_n$ avec $n \in \{1,2\}$ et $\vec{u}_n \neq \vec{0}$.

2.1 Calculez le déterminant et la matrice inverse de $[A]$.

2.2 Trouvez les valeurs propres de $[A]$.

2.3 Si les valeurs propres sont classées par ordre croissant, comment s'écrit alors la matrice diagonale $[D]$, associée à $[A]$?

2.4 Les premières coordonnées des vecteurs propres, celles suivant $\vec{i}$, sont respectivement choisies égales à 1 et -2. Calculez alors les coordonnées manquant pour définir complètement les vecteurs propres.

2.5 Comment s'écrit alors la matrice de passage $[P]$ telle que $[A].[P] = [P].[D]$?

2.6 Trouvez la solution générale du système d'équations différentielles $\frac{d\overrightarrow{X}(t)}{dt} = [A].\overrightarrow{X}(t)$ avec $\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$. On pourra utiliser $\overrightarrow{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ tel que $\overrightarrow{X}(t) = [P]\overrightarrow{Y}(t)$.

2.7 Quelle est alors la solution particulière de la question 2.6 qui vérifie la condition initiale $\overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$?

Exercice 3

On considère la fonction $H(s)$ de la variable complexe s, non nulle, définie par

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{Q} + s^2}$$

où Q est un nombre réel strictement positif. On considère, dans la suite, que $s = \mathrm{j}\omega$ avec $\omega \in \mathbb{R}^+$.

On pose $G(\omega) = |H(\omega)|$ et on rappelle que, si log correspond au logarithme décimal, on a $20.\log(2) \approx 6$.

3.1 Calculez l'expression de $H(\omega)$ puis celle de $G(\omega)$.

3.2 Déterminez l'expression des asymptotes quand $\omega \mapsto 0$ et $\omega \mapsto +\infty$, ainsi que la pente en décibels associée quand on double la fréquence pour le cas $\omega \mapsto +\infty$.

3.3 Calculez l'expression de $G'(\omega)$, la dérivée de $G(\omega)$.

3.4 Etudiez les variations de $G(\omega)$, suivant la valeur de Q, et tracez l'allure du gain, en décibels, associé à chaque gamme de valeurs de Q intéressantes.

3.5 Calculez la valeur de $G(1)$ et déduisez alors la valeur de Q à choisir pour que l'on ait $20\log(G(1)) \approx -3$ dB.

On applique la transformation $s \mapsto \frac{1}{s}$ à $H(s)$ pour obtenir $H_2(s)$.

3.6 Déterminez l'expression de $H_2(s)$, celle de $H_2(\omega)$ ainsi que celle de $G_2(\omega)$, qui devra être exprimée en fonction de $G(\omega)$.

3.7 Sur la base des résultats obtenus pour $G_(\omega)$ et de l'étude des asymptotes de $G_2(\omega)$, proposez les différents cas de figure intéressants pour le tracé de $G_2(\omega)$, en décibels, en fonction des gammes de valeurs pour Q.

3.8 Quelle valeur doit-on adopter pour Q pour avoir $20\log(G2(1)) \approx -3$ dB ?

CONSERVATOIRE NATIONAL SUPÉRIEUR DE MUSIQUE ET DE DANSE DE PARIS
Formation Supérieure aux Métiers du Son

Concours d'Entrée 2007 : Épreuve de Physique
Durée : 3 heures

Les exercices sont présentés dans un ordre logique car on peut se resservir d'éléments établis dans les exercices précédents : les exercices sont donc liés. Mais, le découpage proposé doit permettre d'aller aussi loin que possible.

Exercice 1 : transformation adiabatique

On considère que la pression p et la masse volumique ρ sont reliées par la transformation adiabatique :

$$p.\rho^{-\gamma} = \text{cste} \tag{1}$$

où γ est supposé constant.

1.1 En pratiquant une dérivation logarithmique de l'équation (1), trouvez une première relation liant les différentielles dp et $d\rho$, ainsi, bien entendu, que p, ρ et γ.

De plus, on peut encore supposer, d'abord, que l'air est un gaz parfait, obéissant à la loi $p.\rho^{-1} = rT$ où r est une constante et T représente la température et, ensuite, que la célérité des ondes c_0 est définie par $c_0^2 = \gamma r T$.

1.2 Quelle devient alors l'expression liant dp et $d\rho$ si on cherche à éliminer p, ρ et γ ?

Cette dernière relation sera utilisée dans les exercices 4 et 5.

Exercice 2 : formulation « fluide » de l'équation des ondes planes progressives aller

On considère le modèle **purement mathématique** d'onde plane progressive aller, notée $\psi^+(x,t)$, défini par

$$\psi^+(x,t) = f(t - \frac{x}{c_0}) \tag{2}$$

où f est une fonction quelconque mais dérivable et continue autant de fois que nécessaire, x la distance à la « source », t l'intervalle de temps depuis le temps pris comme référence et c_0 la célérité des ondes telle qu'introduite dans le premier exercice.

Bien entendu, on se place à des distances x suffisamment grandes.

2.1 Quelle est la signification physique de la quantité $\dfrac{x}{c_0}$?

2.2 A partir du calcul des dérivées partielles $\dfrac{\partial}{\partial t}\psi^+(x,t)$ et $\dfrac{\partial}{\partial x}\psi^+(x,t)$, déterminez l'équation du premier ordre la plus simple possible reliant ces deux dérivées partielles.

En Mécanique des Fluides, on introduit la notion d'opérateur de dérivée particulaire, noté $\frac{D}{Dt}$ et défini par $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v.\frac{\partial}{\partial x}$ dans le cas unidimensionnel où v correspond à la vitesse des particules à l'endroit où on pratique l'observation.

Cet opérateur permet, en un point donné, de tenir compte à la fois des variations de la quantité étudiée en fonction du temps, donc d'instationnarités locales, et des variations de cette même quantité en fonction des conditions d'écoulement au voisinage du point étudié, donc d'instationnarités spatiales.

2.3 Déterminez la formulation faisant appel à une dérivée particulaire de l'équation trouvée à la question 2.2 en précisant quelle est la valeur de la vitesse locale.

Dans la suite, cette équation sera nommée **équation des ondes planes progressives aller**.

2.4 Quelle(s) modification(s) du modèle mathématique des ondes planes progressives aller $\psi^+(r,t)$ faut-il faire pour trouver le modèle mathématique associé aux ondes planes progressives retour, que l'on notera $\psi^-(x,t)$?

2.5 A partir de l'équation trouvée pour les ondes planes à la question 2.3, proposez l'équation associée aux ondes planes retour utilisant une dérivation particulaire dont il faudra préciser la valeur de la vitesse.

L'équation trouvé en 2.3, ou **équation des ondes planes progressives aller**, sera réutilisée dans la suite.

On pourrait montrer que l'équation classique, avec des dérivées partielles spatiale et temporelle du second ordre, nommée équation de propagation des ondes ne devient nécessaire que si l'on suppose qu'il y a **superposition** des ondes planes progressives **planes aller et retour**.

Exercice 3 : travail sur un cas particulier de l'équation de conservation de la quantité de mouvement en Mécanique des Fluides

On considère l'équation de Bernoulli correspondant au cas d'un écoulement plan unidimensionnel compressible, irrotationnel et **sans pertes**, définie par

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}.\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{cste} \tag{3}$$

où φ correspond au potentiel scalaire des vitesses et est défini par $v = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, et où on n'a pas indiqué que chacune des quantités dépend des variables spatiale x et temporelle t, afin de simplifier les écritures.

3.1 En calculant la dérivée partielle spatiale de $p\rho^{-1}$ et celle de l'équation de la transformation adiabatique $p\rho^{-\gamma} = \text{cste}$, à chaque fois en fonction des différentielles dp et $d\rho^{-1}$, trouvez l'expression de $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\gamma}{\gamma - 1}.\frac{p}{\rho}\right]$.

3.2 En calculant les dérivées partielles spatiales deux autres termes de l'équation (3), trouvez l'expression de la conservation de la quantité de mouvement, unidimensionnelle, valable en Mécanique des Fluides, si on néglige l'effet des pertes. On pourra supposer que les opérateurs de dérivation partielle temporelle et spatiale permutent sans souci.

3.3 Proposez une expression de l'équation trouvée en 3.2 en introduisant une dérivée particulaire.

3.4 Quelle(s) condition(s) faudrait-il vérifier pour que l'équation trouvée en 3.3 corresponde à une équation d'onde plane progressive aller pour la vitesse ? Quelle est notamment la valeur de la célérité des ondes associée à cette équation ?

3.5 Que signifie physiquement la condition trouvée concernant la pression p ? Est-ce que dans le cas de la production d'un son cette condition peut-être vérifiée ? Peut-on alors légitimement supposer que la vitesse vérifie une équation d'onde progressive plane aller ?

« Loin des sources » , c'est-à-dire là où on suppose généralement valide l'approche ondulatoire, par exemple en Acoustique, on obtiendrait un résultat similaire pour la vitesse en supposant des phénomènes sphériques et non plus plans.

Exercice 4 : analyse d'une version de l'équation de la conservation de la masse « loin des sources »

Loin des sources, si on suppose les phénomènes plans, l'équation unidimensionnelle de conservation de la masse peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big[\rho v\Big] = 0 \tag{4}$$

4.1 Proposez une écriture de l'équation (4) en introduisant une dérivée particulaire pour ρ.

4.2 En utilisant l'expression trouvée à la question 1.2, reliant les différentielles dp et $d\rho$, trouvez l'expression utilisant la dérivation particulaire de la pression p associée à la conservation de la masse.

4.3 En utilisant les résultats de l'exercice 2 concernant l'équation des ondes planes progressives planes aller, étudiez les conditions à vérifier pour que la pression p et la masse volumique ρ obéissent à une équation de propagation d'onde plane aller. Quelle est en particulier la valeur de la célérité des ondes qui intervient ?

4.4 Si on suppose que la pression et la masse volumique peuvent être modélisées de façon satisfaisante par des ondes planes progressives aller, quelle est alors la valeur moyenne de la vitesse des particules ? Peut-on alors supposer les particules quasiment immobiles par rapport à la vitesse à laquelle se propagent les ondes ?

4.5 Quelles sont, finalement, les quantités physiques pour lesquelles l'approche ondulatoire pourrait constituer une approximation acceptable ?

L'étude du cas de phénomènes sphériques, plus en rapport avec certains résultats expérimentaux mais un peu plus complexe à traiter, semble conduire aux mêmes conclusions.

Exercice 5 : Dérivation « fluide » des analogies électroacoustiques

On se placera dans le cadre de l'analogie directe qui permet d'établir des schémas électriques équivalents, pour des dispositifs acoustiques, en supposant que la pression correspond à une tension et que le débit volumique correspond à une intensité électrique.

On commence par étudier la cas d'un petit tube acoustique, par exemple un évent. Ensuite, on s'intéressera à la modélisation du comportement d'un volume. Enfin, pour montrer une application simple, on étudiera le cas du résonateur de Helmholtz.

On considérera aussi une transformation, notée sans plus de détails T_ω qui permettra de passer de grandeurs spatio-temporelles $u(x,t)$ (pour le débit volumique) ou $p(x,t)$ respectivement aux grandeurs spatio-fréquentielles $U_\omega(x,\omega)$ et $P_\omega(x,\omega)$.

On supposera aussi qu'à l'application de l'opérateur de dérivation temporelle $\dfrac{\partial}{\partial t}$ correspondra, par T_ω, une multiplication par $\mathrm{j}\omega$: par exemple, $\dfrac{\partial}{\partial t}p(x,t)$ devient $\mathrm{j}\omega.P_\omega(x,\omega)$ si on applique la transformation T_ω, et ceci reste valable pour le débit volumique, notamment.

Pour un tube acoustique de petite section s_t, **uniforme**, et de petite longueur l_t, on peut supposer que l'écoulement à l'intérieur de celui-ci est plan et incompressible, et envisager d'utiliser, pour commencer, une description par une équation de Bernoulli incompressible, irrotationnelle et instationnaire, ne prenant pas en compte les pertes. On a alors :

$$p + \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \rho_0.\frac{d\varphi}{dt} = \text{cste} \tag{5}$$

où on a

$$\varphi(x,t) = \int_{-\infty}^{x} v(u,t).du.$$

5.1 Donnez une interprétation physique de la nature de chacun des termes intervenant dans l'équation (5).

Si on considère que l'entrée du tube se fait en $x=0$ et la sortie en $x=l_t$, alors on peut encore écrire (5) sous la forme :

$$p(0,t) + \frac{1}{2}\rho_0 v^2(0,t) + \rho_0.\frac{d}{dt}\varphi(0,t) = p(l_t,t) + \frac{1}{2}\rho_0 v^2(l_t,t) + \rho_0.\frac{d}{dt}\varphi(l_t,t) \tag{6}$$

On note $u(x,t)$ le débit volumique pour la position x.

5.2 Quelle est la relation entre le débit volumique et la vitesse, vu que l'on suppose les phénomènes plans ?

5.3 Puisque l'écoulement est supposé incompressible dans le tube, que peut-on dire du débit volumique dans le tube ? Cette hypothèse doit permettre la suppression de deux termes, égaux, dans l'équation (6). Proposez alors une première version simplifiée de l'équation (6).

5.4 En proposant une expression de la quantité $\varphi(l_t,t)-\varphi(0,t)$ en fonction du débit volumique $u(0,t)$, ou $u(l_t,t)$, proposez une deuxième version simplifiée de l'équation (6).

5.5 En appliquant la transformation T_ω à l'équation trouvée en 5.4, proposez le schéma électrique équivalent au tuyau.

En fait, il faut aussi tenir compte de pertes visqueuses que l'on suppose correspondre à une diminution de pression entre l'entrée ($x=0$) et la sortie ($x=l_t$) du tube, donnée par $r_a.u(0,t)$ où r_a est une constante dépendant du profil du tube (de section constante). Il s'agit donc d'une perte de charge additionnelle.

5.6 En appliquant la transformation T_ω à cette perte de charge additionnelle, proposez la version modifiée du circuit électrique équivalent pour le tube si on prend maintenant en compte les pertes.

Pour une cavité de volume conséquent, on ne peut plus supposer que l'écoulement est incompressible. Au contraire, on suppose que l'on a affaire à une compression adiabatique et à une homogénéisation instantanée de la pression dans toute la cavité (temps d'homogénéisation supposé négligeable).

On suppose toujours, pour autant, les phénomènes plans. Et on suppose que l'on a un débit entrant noté $u(0,t)$ (associé à une vitesse $v(0,t)$ homogène sur toute la surface d'entrée s_e) et un débit sortant $u(l_c,t)$ (associé à une vitesse $v(l_c,t)$ homogène sur toute la surface d'entrée s_s).

On suppose aussi que la cavité à une longueur l_c et que la pression à l'intérieur, notée $p(x,t)\quad \forall x\in[0,\ l_c]$, est homogène dans toute la cavité, et qu'il en est forcément de même pour la masse volumique, puisque l'on suppose que les variations de la pression se font suivant une relation adiabatique.

On part aussi d'une version locale unidimensionnelle de la conservation de la masse qui s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\Big[\rho v\Big]=0 \tag{7}$$

et l'on considère, pour établir la version intégrée sur le volume, que les flux volumiques entrant et sortant sont de signes opposés (tout en gardant à l'esprit qu'il s'agit de grandeurs algébriques) et se font avec une masse volumique constante ρ_0.

5.7 Expliquez pourquoi, en vous aidant par exemple de l'analyse du comportement de l'équation (7), si on note V_c le volume de la cavité, l'expression intégrée de l'équation (7), s'écrit :

$$V_c.\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)=\rho_0\Big(u(0,t)-u(l_c,t)\Big)\quad \forall x\in[0,\ l_t] \tag{8}$$

5.8 En utilisant la relation entre dp et $d\rho$ trouvée en 1.2, déduisez la version de l'équation (8) valable pour la pression $p(x,t)$ dans la cavité.

5.9 Que devient l'équation trouvée en 5.8 si on la transforme par T_ω ? En utilisant le principe des analogies pression/tension et débit volumique/intensité, proposez le schéma électrique équivalent pour une cavité.

On considère maintenant le cas d'un résonateur de Helmholtz, constitué d'une cavité fermée en entrée, de volume V_c à laquelle on vient greffer un col (tube), de petite longueur l_t et de faible section s_t.

Pour plus de simplicité, on utilise les coordonnées relatives afin que la sortie du tube soit située en $x = l_t$.

On suppose encore que l'on vient appliquer une pression d'excitation notée $p(l_t, t)$ à la sortie du col ($x = l_t$) et que cela génère une pression $p(0, t)$ uniforme dans toute la cavité.

5.10 En utilisant les schémas électriques équivalents trouvés pour le tube et la cavité, proposez le schéma électrique équivalent pour le résonateur de Helmholtz complet.

5.11 A partir du schéma électrique trouvé en 5.10 et en considérant valide la notion d'impédance (sous-entendue en fait), proposez la fonction de transfert ou rapport des grandeurs $P_\omega(0, \omega)$ et $P_\omega(l_t, \omega)$.

On pourrait réécrire la fonction de transfert trouvée et montrer qu'elle correspond à un filtre dont la fréquence caractéristique dépend fortement du volume V_c de la cavité et de la longueur l_t du col. Mais, faute de temps, cette étude ne sera pas entreprise dans le cadre de cette épreuve de concours.